Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III
Prof. Dr. G. Wang
Dr. R. Alessandroni

WS 2012/13, Serie 5
19.11.2012

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^1([a,b])$.
(a) Sei $E := \{x \in [a,b] | f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(E)$ eine Lebesgue Nullmenge ist. *Tipp: Benutzen Sie Lemma 4.5 aus der Vorlesung.*
(b) Sei $G := \{x \in [a;b] | f(x) = 0\}$ und $H := \{x \in [a,b] | f(x) = 0, f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $G \backslash H$ eine Lebesgue Nullmenge ist. *Tipp: Zeigen Sie, dass $A_n := \{x \in [a,b] f(x) = 0, |f'(x)| \geq 1n\}$ nur endliche viele Elemente enthält.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien A, B $\mathcal{L}^n$-messbar mit $\mathcal{L}^n(A), \mathcal{L}^n(B) < \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^n(A \cap (B + x)) \to \mathcal{L}^n(A \cap B)$ für $x \to 0$.
Tipp: Approximieren Sie B von unten durch eine kompakte Menge K und von oben durch eine offene Menge U. Nutzen Sie, dass $K + x \subset U$ und $K - x \subset U$ für x genügend klein.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei A konvex und beschränkt, mit $0 \in int(A)$.
(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(int(A))$.
Tipp: Zeigen Sie zunächst $int(A) = \cup_{k \geq 2}((1 - \frac{1}{k})\overline{A})$.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^n(\partial A) = 0$.
(c) Zeigen Sie, dass A messbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ absolut stetig. Zeigen Sie, dass f $\mathcal{L}^1$-Nullmengen auf $\mathcal{L}^1$-Nullmengen abbildet.
Eine auf einem Intervall $I = [a,b]$ definierte Funktion f heißt absolut stetig*, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass für jede endliche Familie paarweiser disjunkter Intervalle (a_k, b_k), die alle in I enthalten sind und der Bedingung $\sum_{k \in \mathbb{N}} |b_k - a_k| < \delta$ genügen, gilt $\sum_{k \in \mathbb{N}} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 26.11 bis 12:00**.